



TITLE:

A.カオスへのいくつかのルート(強制ローレンツ系の場合)B.力学系におけるトポロジー(カオスとその周辺,研究会報告)

AUTHOR(S):

上江洌, 達也

CITATION:

上江洌, 達也. A.カオスへのいくつかのルート(強制ローレンツ系の場合)B.力学系におけるトポロジー(カオスとその周辺,研究会報告). 物性研究 1982, 39(2): B31-B36

ISSUE DATE:

1982-11-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/90783>

RIGHT:

- A. カオスへのいくつかのルート (強制ローレンツ系の場合)
 B. 力学系におけるトポロジー

- 1) K. Ikeda, H. Daido and O. Akimoto, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 709.
- 2) K. Ikeda, K. Kondo and O. Akimoto, to be published.
- 3) F. A. Hopf, D. L. Kaplan, H. M. Gibbs and R. L. Shoemaker, Phys. Rev. **A25** (1982) 2172.

A. カオスへのいくつかのルート (強制ローレンツ系の場合)

B. 力学系におけるトポロジー

京大・理 上江洌 達 也

A. カオティックな振舞を示すパラメーターで、ローレンツモデルに周期外力 ($A \cos Bt$) を加えると (式 (A・1)), 系は様々な応答を示し, (A, B) 空間で, カオス相, 周期解相の分布は極めて複雑になる¹⁾

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x &= -\sigma(x-y) \\ \frac{d}{dt}y &= rx - y - xz \\ \frac{d}{dt}z &= xy - bz + A \cos Bt \\ \sigma &= 10.0, \quad r = 28.0, \quad b = 2.6667\end{aligned}\tag{A・1}$$

この報告では、両相の境界でどのような現象が生じているのか、すなわち、カオス相への遷移について議論する²⁾。次の3つのタイプの遷移が存在する。

- I. 2^n -バイファケーション (→バンド・マーキング→対称カオス)
- II. ホモクリニック・インターセクションの生成によるインターミッテンシー
- III. ヘテロクリニック・インターセクションの生成によるインターミッテンシー

以下、これらについて順に述べていく。

- I. 2^n バイファケーション, $B = 6.0$ (固定), $A = 114.9 \sim 116.5$

A の値を 114.9 から上げていくと $1T_F$ 周期解から周期倍バイファケーションが順次生じ, $64T_F$ の周期解までみつかった。 (T_F は外力の周期 $\frac{2\pi}{B}$)。 $S(l)$ を l 周期毎のストロボ・マップとしたとき, 2^k 周期領域で, $dS(2^k)$ の固有値は, 近似的に次のように書ける。

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2}^{(k)} &= C^{(k)} \pm \sqrt{\{C^{(k)}\}^2 - B^{(k)}} \\ C^{(k)} &= -\sqrt{a^{(k)}} (A - A_c^{(k)})\end{aligned}\tag{A・2}$$

上江洸達也

$A_c^{(k)}$, $a^{(k)}$, $B^{(k)}$ は, 適当な定数。これから, 系は, Hénon マップで近似できることが結論される。一般に, 次の命題が証明できる。

「散逸率一定の2次元写像は, 2次までの非線形項をもつなら, 変数変換で Hénon マップに帰着できる」。

散逸率 B は, データより ~ 0.51 と評価される。Hénon マップでは, k 周期解の安定領域での複素固有値の領域の全体に対する比 $\Delta^{(k)}$ は, 次のようになる。

$$\Delta^{(k)} = \frac{2\sqrt{B^{(k)}}}{1+B^{(k)}} \quad (\text{A} \cdot 3)$$

$B=1$ のとき, $\Delta^{(k)}=1$ であり, $\Delta^{(k)}$ は, 2次元性の目安となる。 n_c を1次元的になる周期数とすれば, $n_c \propto \frac{1}{|\ln B|}$ の依存性を持つ。 n_c 以後 Feigenbaum の相似則が適用可能になり, δ として ~ 4.715 を得た。 A を上げていくと, $116.43 < A$ で島カオスが観測され, バンド・マーキングが生じ, $A \sim 116.49$ で2つの非対称島カオスが結合して, 対称カオスになる。片側への平均継続滞在時間は, パラメーターの増加とともに減少する。更に A を上げると, 安定な, 対称リミットサイクルが出現する。これについて, 次に議論する。

Ⅱ. ホモクリニック・インターセクションの生成によるインターミッテンシー, $B=6.0$ (固定), $A_c=123.899$

$A > A_c$ では, 周期 $2T_F$ の対称リミットサイクルが安定である。一般に, 対称リミットサイクルは, 周期倍分岐を生じ得ないことが証明でき, 今の場合 $dS(2)$ の固有値は, $+1$ で不安定化する。実験データは, ホモクリニックインターセクションの生成を示している(図1)。この時, インターミッテントな振舞が観測される。

Ⅲ. ヘテロクリニック・インターセクションの生成によるインターミッテンシー,

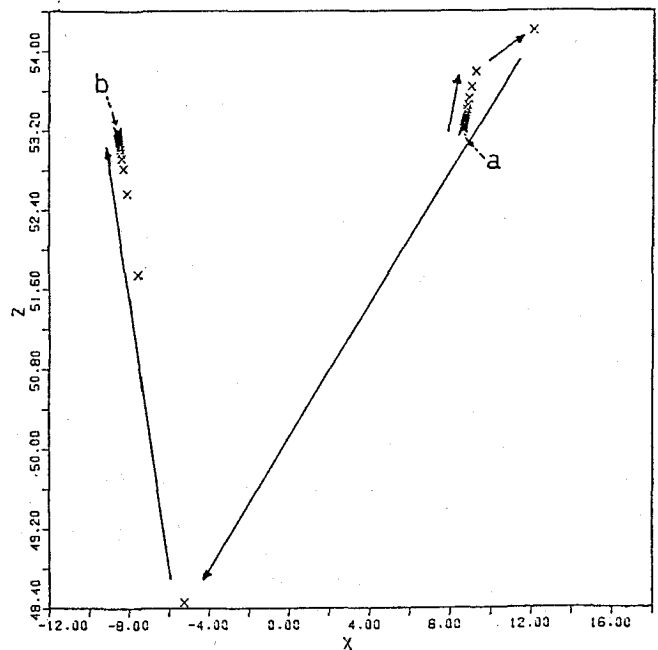


図 1

- A. カオスへのいくつかのルート (強制ローレンツ系の場合)
 B. 力学系におけるトポロジー

$B = 4.7$ (固定), $A_c = 54.865$

$A > A_c$ で, 1対の周期 $2T_F$ の非対称リミットサイクルが安定であり, $A < A_c$ では, 対称なカオス出現する。これより, ヘテロクリニック・インターセクションが生成したと結論され, インターミitttentな振舞が観測される。 $dS(2)$ の複素固有値が絶対値1で不安定化するので, $A > A_c$ で2次元リアプノフ数 $L(S)$ は, $L(S) = 2L(1)$ となる。従って, $A = A_c$ で, $L(1)$, $L(S)$ は同時に0になり, $A < A_c$ でともに正となる。これは, ストロボマップでのストレンジ・アトラクターの次元が2以上であることを意味する³⁾。

Ⅱ及びⅢにおけるインターミittテンシーについては, 層流状態の平均継続時間のパラメータ-依存性などについて, 更に詳細な議論が必要である。

B. 従来, 1次元写像について, 2^n -バイファケーション, インターミittテンシーなどの機構も詳細に研究されてきたが, flow system については, ローレンツプロットや, ポアンカレ写像によって1次元写像に還元して, 議論されてきた。flow system 自体に対して, バイファケーションの機構を議論するには, 解の位相的構造を理解することが必要になってくる。ここでは, 3次元 flow system に話を限り, このような方向での試みにおいて, 最近得られたいくつかの結果について報告する^{4,5)}。

周期解 x_0 を特徴づけるものは, その結び目のタイプ, ねじれ数 n_i , 及び相対ねじれ数 r_i である⁴⁾。 n_i と r_i とは, x_0 によって定まる量 L によって等式 $n_i = r_i + L$ によって関係づけられる。 n_i と r_i のバイファケーションの前後での変化について以下に述べる。

I. ピッチフォーク・バイファケーション

x_0 が不安定化して, 2つの周期解 x' , x'' が得られ, それらのリンク数 $L(x', x'')$ は, $L(x', x'') = n_1$, 又 $n_i = n'_i = n''_i$, $r_i = r'_i = r''_i$ となる。($i = 1, 2, (3)$, 3は非自律系の場合)

Ⅱ. サブハーモニック・バイファケーション

1つの周期解 x'' が得られる。又, $r''_i = 2(n_1 + n_i)$, $r''_i = 2r_i$ 。これらは, 適当な仮定のもとで証明できる。

Ⅲ. 周期倍分岐のカスケード (2^n -分岐)

各 2^k 周期解の安定領域で, $dS(2^k)$ の固有値 $\lambda_1^{(k)}$ は, 正→複素数→負と変化して, +1 から -1 になるが, その時の $n_i^{(k)}$, $r_i^{(k)}$ 及び $L^{(k)}$ の変化について議論する。ここでは自律系のみを取り扱う。従って, $i = 1$ のみを考えればよく, ($\because n_1 = n_2$, $r_1 = r_2$) 又 $\lambda_1^{(k)}$ が実の範囲で $n_1^{(k)}$ は一定なので, $\lambda_1^{(k)}$ が正のとき $n_1^{(k)}(i)$, 負のとき $n_1^{(k)}(f)$ とする。 $r_1^{(k)}$, $L^{(k)}$ も同

上江 洵達也

様。このとき、次の事が成立する。

$$a) \quad L^{(k)}(i) = L^{(k)}(f) \quad (k \geq k_0). \quad (B \cdot 1)$$

$$\text{これより } \Delta n_1^{(k)} = n_1^{(k)}(i) - n_1^{(k)}(f) = r_1^{(k)}(i) - r_1^{(k)}(f) \equiv \Delta r_1^{(k)}.$$

$$b) \quad \Delta n_1^{(k)} = (-1)^k \frac{\ell}{2}, \quad \ell \text{ はある整数}. \quad (B \cdot 2)$$

ℓ は、アトラクターの各折りたたみに向きをつけたとき、それを総和したものである。

以上より、次式が得られる。

$$\begin{aligned} r_1^{(k+k_0)}(i) &= T_k \left[r_1^{(k_0)}(i) - \frac{\ell}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{\ell}{3} \right] \\ r_1^{(k+k_0)}(f) &= T_k \left[r_1^{(k_0)}(f) - \frac{\ell}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{\ell}{6} \right] \\ n_1^{(k+k_0)}(i) &= T_k^2 \left[n_1^{(k_0)} - \frac{2\ell}{5} + \left(-\frac{1}{4}\right)^k \frac{2\ell}{5} \right] \\ n_1^{(k+k_0)}(f) &= T_k^2 \left[n_1^{(k_0)} - \frac{2\ell}{5} - \left(-\frac{1}{4}\right)^k \frac{\ell}{10} \right] \\ L^{(k+k_0)} &= T_k \left[T_k \left(n_1^{(k_0)} - \frac{2\ell}{5} \right) - r_1^{(k_0)}(i) + \frac{\ell}{3} \right] + (-1)^k \frac{\ell}{15} \end{aligned} \quad k \geq 0 \quad (B \cdot 3)$$

表 1

k	1		2		3		4	
ω	0.6(i)	0.7(f)	0.72(i)	0.76(f)	0.772(i)	0.782(f)	0.7847(i)	0.7866(f)
$n_1^{(k)}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-6	$-\frac{13}{2}$	-26	$-\frac{51}{2}$	-102	$-\frac{205}{2}$
$r_1^{(k)}$	-1	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-3	$-\frac{5}{2}$	-5	$-\frac{11}{2}$
$\Delta r_1^{(k)}$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$L^{(k)}$	-1	-1	-5	-5	-23	-23	-97	-97
Knot type	trivial		trivial		$T_{2,3}$ = Trefoil		*	

k	5		6		7	
ω	0.787(i)	0.7874(f)	0.7876(i)	0.78767(f)	0.787705(i)	0.78772(f)
$n_1^{(k)}$	-410	$-\frac{819}{2}$	-1638	$-\frac{3277}{2}$	-6554	$-\frac{13107}{2}$
$r_1^{(k)}$	-11	$-\frac{21}{2}$	-21	$-\frac{43}{2}$	-43	$-\frac{85}{2}$
$\Delta r_1^{(k)}$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	
$L^{(k)}$	-399	-399	-1617	-1617	-6511	-6511

- A. カオスへのいくつかのルート (強制ローレンツ系の場合)
B. 力学系におけるトポロジー

表 2

k	(s)	(a)	0 (a)			1 (a)		2 (a)	
r	600 500	480	420 (i)	400 (f)	360 (f)	356 (i)	340 (f)	338 (i)	334.5 (f)
$n_1^{(k)}$	1 1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	10	$\frac{19}{2}$
$r_1^{(k)}$	1 1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$
$\Delta r_1^{(k)}$	*		$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	
$L^{(k)}$	0 0	0	1	1	1	3	3	11	11
Knot type	trivial		trivial			trivial		$T_{2,5}$	

k	3 (a)		4 (a)	
r	334 (i)	333.5 (f)	333.4 (i)	333.3 (f)
$n_1^{(k)}$	38	$\frac{77}{2}$	154	$\frac{302}{2}$
$r_1^{(k)}$	-3	$-\frac{5}{2}$	-5	$-\frac{11}{2}$
$\Delta r_1^{(k)}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
$L^{(k)}$	41	41	159	159

ここで, $T_k = 2^k$. 1 サイクル当りの平均ねじれ数 $\langle n \rangle$, 平均相対ねじれ数 $\langle r \rangle$ は,

$$\langle n \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k^2} n_1^{(k)} = \frac{1}{T_{k_0}^2} (n_1^{(k_0)}(i) - \frac{2l}{5}) \quad (B \cdot 4)$$

$$\langle r \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k} r_1^{(k)} = \frac{1}{T_{k_0}} (r_1^{(k_0)}(i) - \frac{l}{3})$$

と定義される。これらは, 一般のトラジェクトリーに対しても定義でき, アトラクターの位相的分類を可能にする。表 1, 2 に, a) 強制ブラッセレイター (これは $S' \times R^2$ 上の自律系とみなせる) と, b) ローレンツモデルについての数値計算の結果を示す。(イタリックは, (B・3) より得られた値) a) の場合, $l=1$, $\langle r \rangle = -\frac{2}{3}$, $\langle n \rangle = -\frac{5}{3}$, b) の場合, $l=1$, $\langle r \rangle = -\frac{1}{3}$, $\langle n \rangle = \frac{3}{5}$ となる。

以上の議論の高次元系への拡張や, 保存系での議論は今後の課題である。

参考文献

- 1) Y. Aizawa and T. Uezu, Submitted to Prog. Theor. Phys. (1982).
- 2) T. Uezu and Y. Aizawa, "

- 3) J. L. Kaplan and J. A. Yorke; Lecture Notes in Math. 730 (1979) 228.
- 4) T. Uezu and Y. Aizawa, to appear in Prog. Theor. Phys. (1982).
- 5) T. Uezu, in preparation.

カオスを示す簡単なモデルの漸近解について

国士館大・工 清 水 敏 寛
早大・理工 市 村 純

少数自由度系の示すカオスで重要な点は次の二点である。位相空間の中のフローを考えた時にまず① 2つ又はそれ以上のパスに軌道が分離されその後で合流して混ぜられる。② このプロセスが無限に繰り返される。この結果としてアトラクターには自己相似な構造が現われる。このメカニズムをより微視的な立場から調べるために、摂動論を使って解くことのできる簡単なモデルを提案した。

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) - \varepsilon a \dot{x}(t) + b x(t)(x(t)^2 - 1 + m(t)) &= 0, \\ \dot{m}(t) - \varepsilon [c m(t) - f x(t)^2 - r \dot{x}(t)^2 / (1 - m(t))^2] &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

このモデルで a, b, c, f, r は正のパラメータであり、 ε は微小パラメータである。 $r=0$ の場合には、このモデルはローレンツ方程式で時間反転したものと一致する。式(1)を非線型スケールを用いて解いた。まず2つの時間スケール τ と ω を導入する。

$$\tau = \varepsilon t, \quad \frac{d\omega}{dt} = \phi(\tau)\tag{2}$$

ここで $\phi(\tau)$ は以下で self-consistent に決める関数である。 x と m は ε で展開可能であると

$$x = x_0(\tau, \omega) + \varepsilon x_1(\tau, \omega) + \dots, \quad m = m_0(\tau, \omega) + \varepsilon m_1(\tau, \omega) + \dots\tag{3}$$

(2)と(3)を(1)に代入し、 ε の各オーダーを比較すると、まず0次は

$$\phi \frac{\partial}{\partial \omega} m_0 = 0, \quad \phi^2 \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} x_0 + b x_0(x_0^2 - 1 + m_0) = 0$$

この2番目の式は次の様にかえられる。